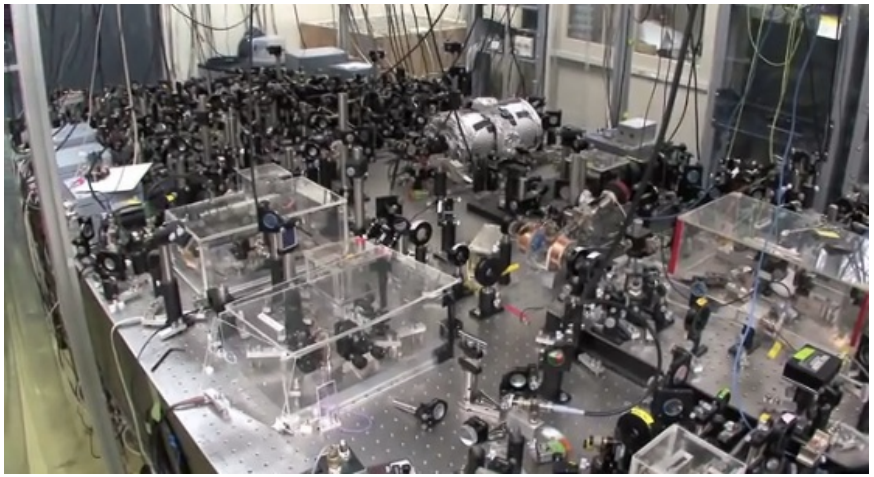
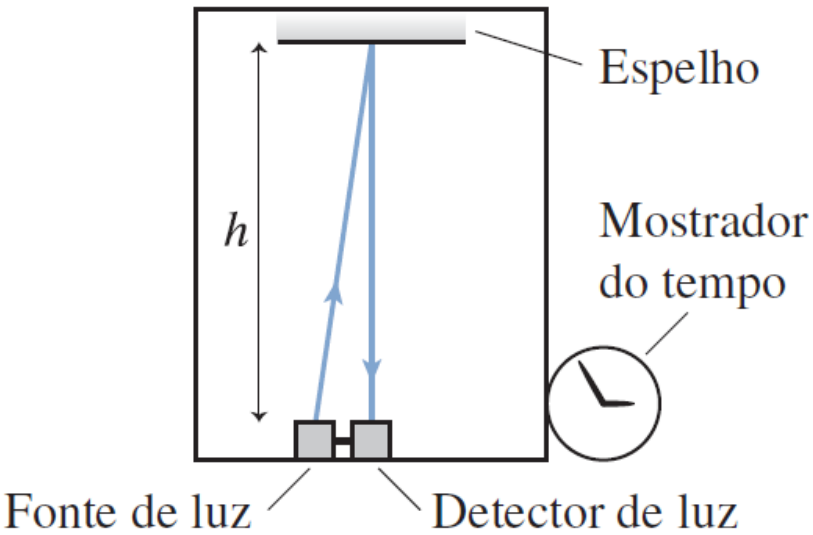
O que é um relógio?

R: qualquer processo físico que se repete a intervalos regulares de tempo



Relógio de luz



Considere 2 eventos:

i) um pulso de luz é emitido

e

ii) o pulso retorna e é detectado.

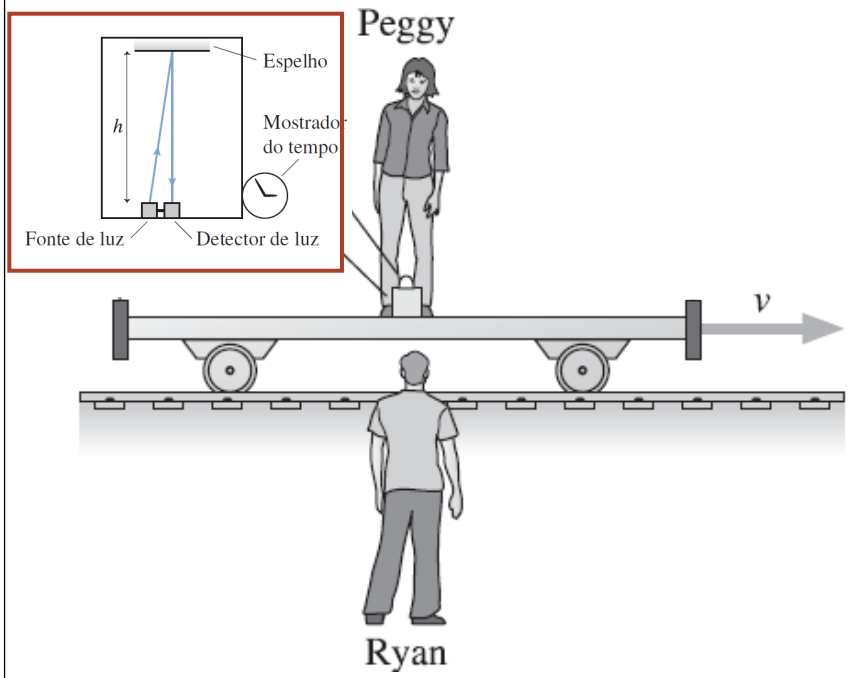
o tempo entre esses dois eventos corresponde a um 'tique' do relógio

No referencial S' onde o relógio está em repouso, esse tempo vale

$$\Delta t' = \frac{2h}{c}$$

Comparando o tempo em 2 referenciais

O exemplo de Ryan e Peggy indica que o tempo "passa" diferente em referenciais em movimento relativo. Podemos usar o relógio de luz para calcular quanto vale essa diferença



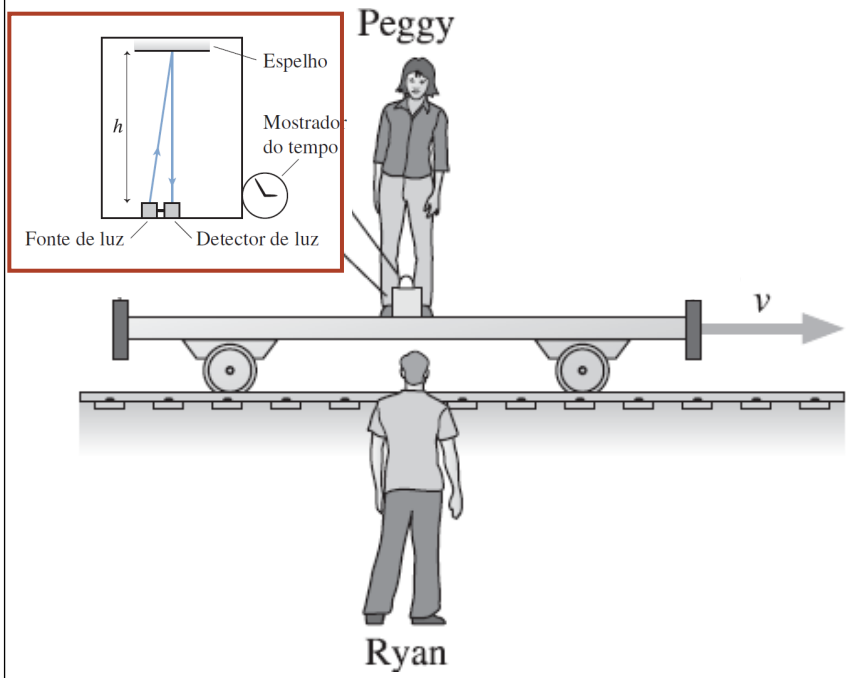
O relógio está em repouso no referencial S' (de Peggy), no qual o tempo entre o evento 1 (emissão) e o evento 2 (detecção) é

$$\Delta t' = \frac{2h}{c}$$

P: e no referencial S (de Ryan)? Qual é a diferença de tempo entre os mesmos dois eventos?

Comparando o tempo em 2 referenciais

O exemplo de Ryan e Peggy indica que o tempo "passa" diferente em referenciais em movimento relativo. Podemos usar o relógio de luz para calcular quanto vale essa diferença



<u>Pergunta conceitual</u>

No ref. S (de Ryan), chamemos de:

- **L: a distância percorrida pela luz entre o evento 1 e o evento 2**
- **Δt: tempo decorrido entre esses dois eventos**

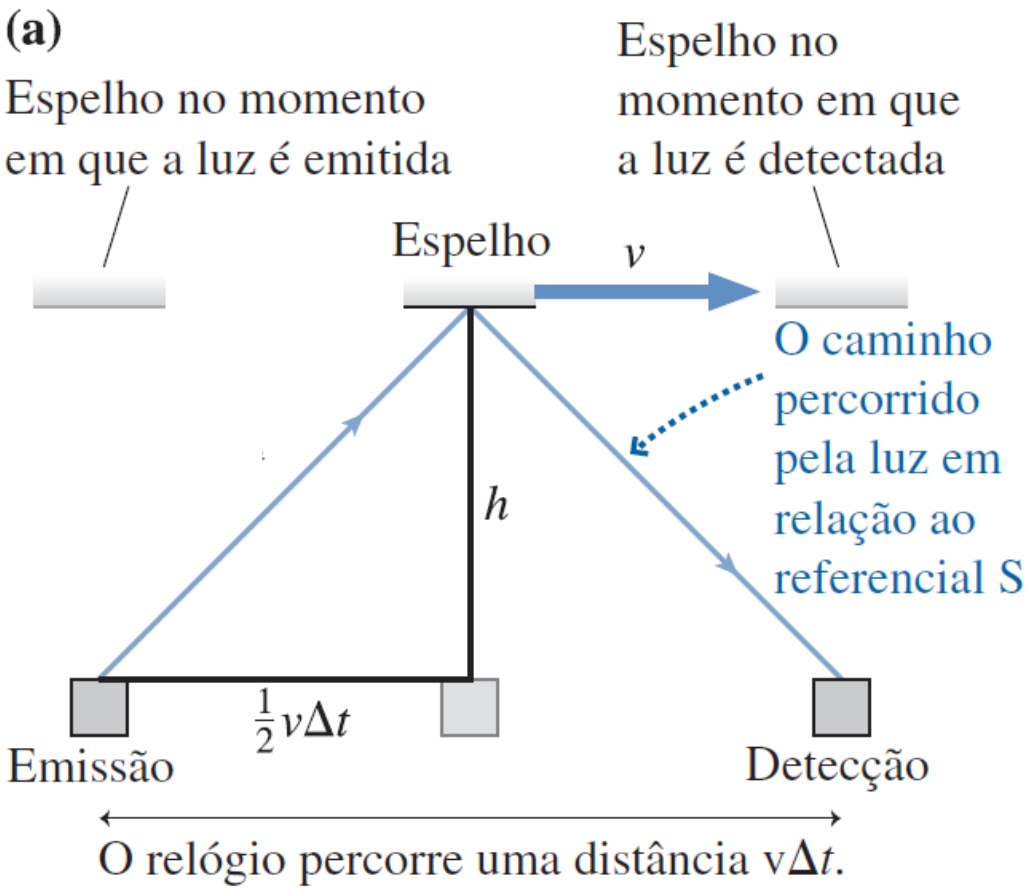
A) L = 2h, Δt = Δt'

B) L > 2h, Δt = Δt'

C) L > 2h, Δt > Δt'

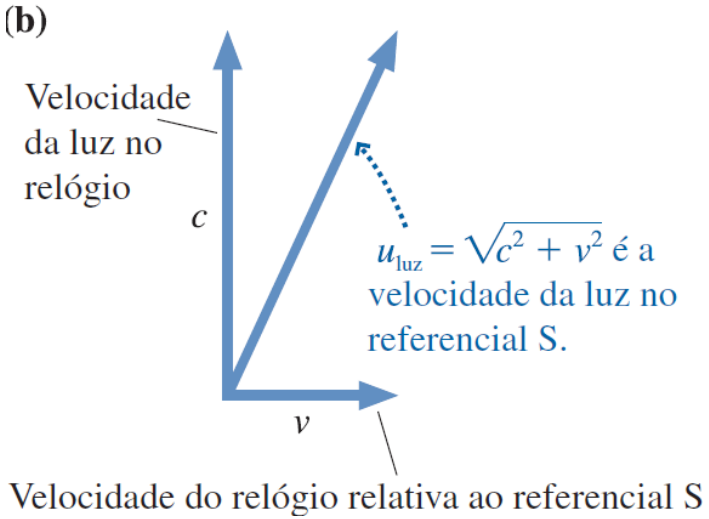
D) L > 2h, Δt < Δt'

Comparando o tempo em 2 referenciais



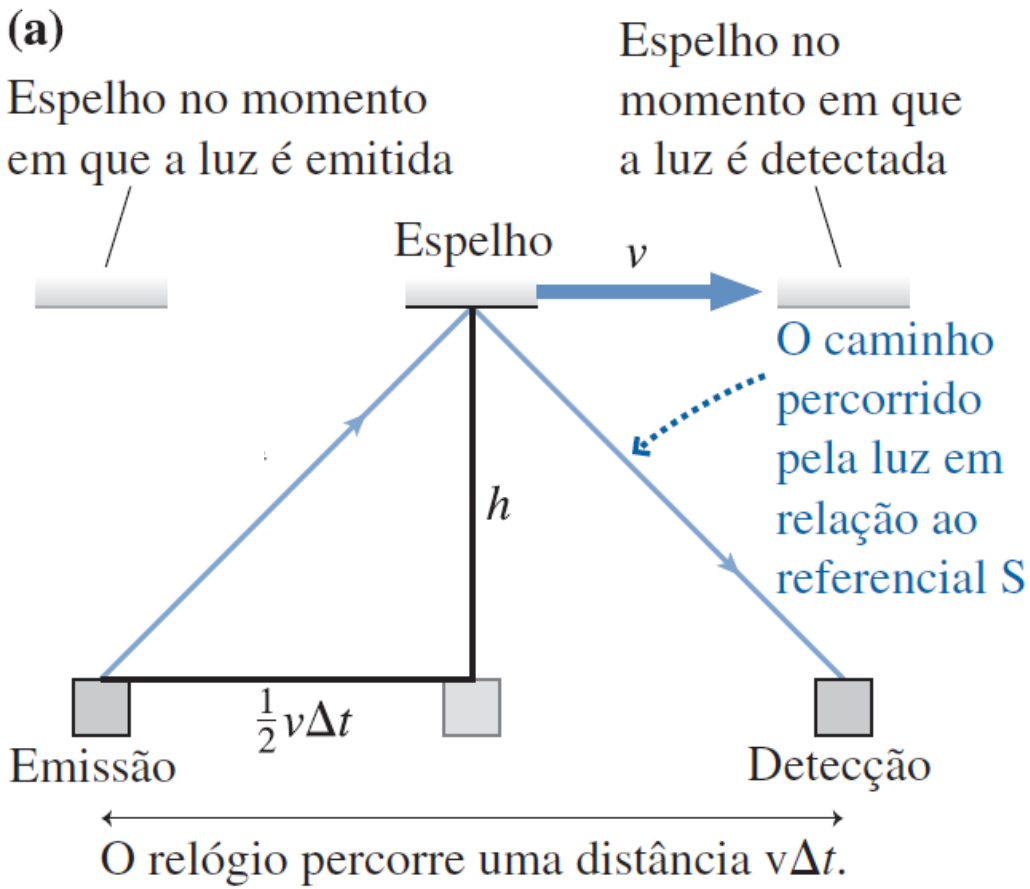
Análise Clássica (incorreta)

$$u_{luz} = \left\| \vec{u}'_{luz} + \vec{v} \right\|$$



$$\Delta t = \frac{2h}{c} = \Delta t'??$$

Dilatação temporal



Análise Relativística (correta)

u_{luz} = c !!!

$$\Delta t = \frac{2h/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\equiv \gamma \Delta t'$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

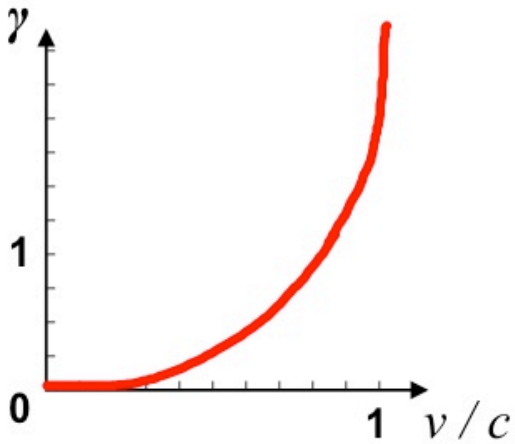
$\beta^2 \equiv v^2/c^2$

Pergunta conceitual

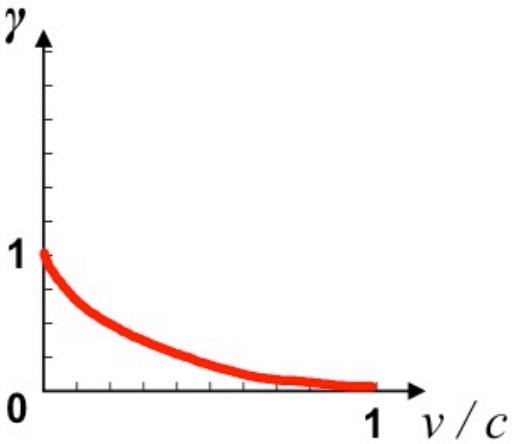
P: como é a dependência de γ com v ?

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

A.

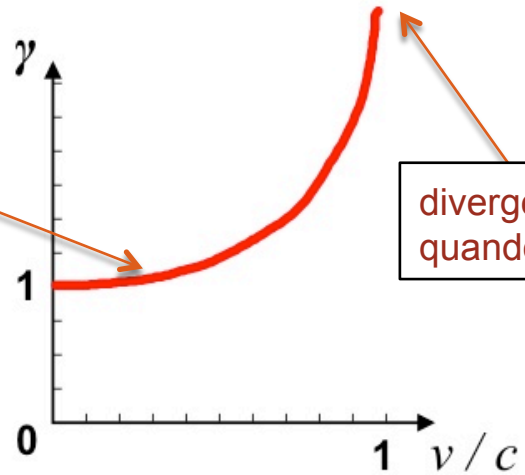


B.



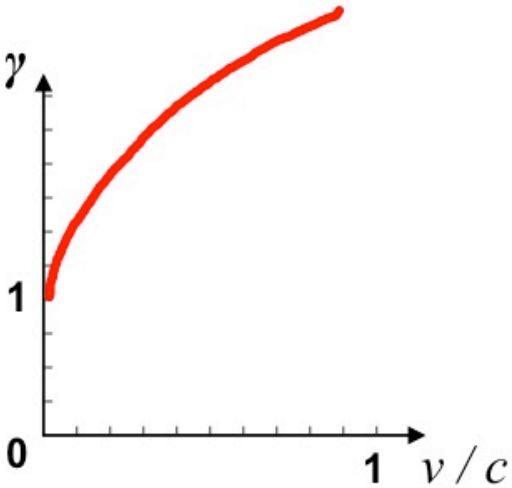
quase constante =1 exceto se v for uma fração apreciável de *c*

C.



diverge para +∞ quando v → *c*

D.



Dilatação temporal

Conclusão: o tempo Δt entre os dois eventos, conforme medido no referencial *S* em que o relógio se move, é *maior* do que o tempo Δt' registrado no referencial *S'* onde o relógio está em repouso. Chamamos esse efeito de

DILATAÇÃO TEMPORAL

Dilatação temporal

Conclusão: o tempo Δt entre os dois eventos, conforme medido no referencial *S* em que o relógio se move, é *maior* do que o tempo Δt' registrado no referencial *S'* onde o relógio está em repouso. Chamamos esse efeito de

DILATAÇÃO TEMPORAL

Pergunta conceitual: na sua opinião, essa dilatação

A) Nunca foi observada no mundo real, e portanto essa teoria tem de estar errada!

B) É um efeito da percepção do Ryan. O tempo <u>real</u> entre os eventos é o medido por Peggy.

C) É real, mas se aplica apenas ao relógio de luz. Relógios comuns, com componentes mecânicos / eletrônicos, não indicam dilatação apreciável.

D) É real e se aplica igualmente a qualquer tipo de relógio.

Tempo próprio

Def: **tempo próprio $\Delta\tau$** = tempo medido por um relógio entre dois eventos que ocorrem **no mesmo ponto do espaço, no referencial de repouso do próprio relógio**. No exemplo acima: o tempo próprio entre dois 'tiques' é **$\Delta\tau = \Delta t'$** (tempo medido no referencial de Peggy)**.**

Em qualquer outro referencial inercial (em movimento com respeito ao relógio), o tempo entre esses eventos será **maior que o tempo próprio**, por um fator $\gamma > 1$.

"Relógios em movimento andam mais devagar"

Dilatação temporal

Saturno dista 1,43 x 10^{12} m do Sol, num referencial em repouso com respeito ao Sistema Solar. O foguete da astronauta Ana viaja em linha reta do Sol a Saturno com uma velocidade constante de 0,9c relativa ao sistema solar.

Quanto tempo levará para o foguete de Ana realizar o percurso em relação a Victor, que está na Terra (assumindo a Terra em repouso, por simplicidade)? E em relação a Ana?

Antes de responder, pense:

P1: quais são os 2 eventos nesta pergunta?

P2: qual desses tempos é um tempo próprio?

A) O medido por Victor
B) O medido por Ana
C) Ambos

Dilatação temporal

Saturno dista 1,43 x 10^{12} m do Sol, num referencial em repouso com respeito ao Sistema Solar. O foguete da astronauta Ana viaja em linha reta do Sol a Saturno com uma velocidade constante de 0,9c relativa ao sistema solar.

Quanto tempo levará para o foguete de Ana realizar o percurso em relação a Victor, que está na Terra (assumindo a Terra em repouso, por simplicidade)? E em relação a Ana?

Antes de responder, pense:

P1: quais são os 2 eventos nesta pergunta?

P2: qual desses tempos é um tempo próprio?

A) O medido por Victor
B) O medido por Ana
C) Ambos

Dilatação temporal

Antes de responder, pense:

P1: quais são os 2 eventos nesta pergunta?

P2: qual desses tempos é um tempo próprio?

A) O medido por Victor
B) O medido por Ana
C) Ambos

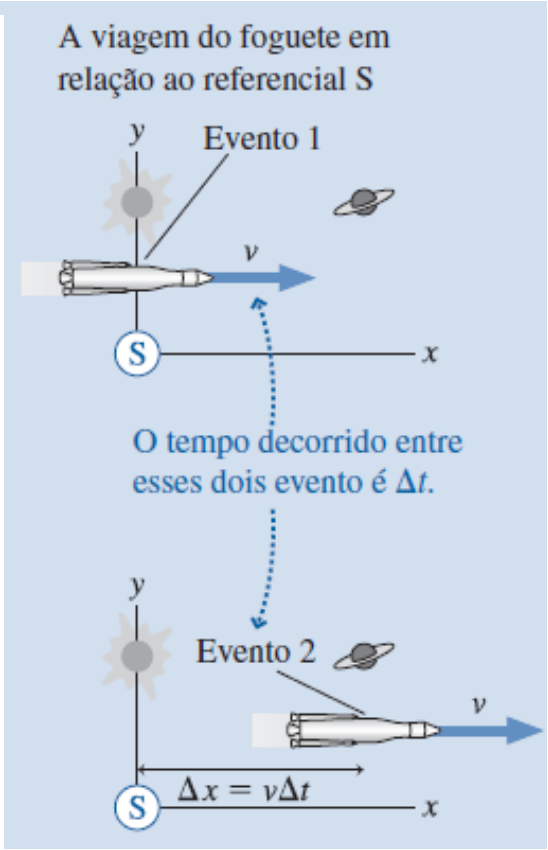
Exemplo de resposta incorreta

Somente Ana mede o tempo próprio. Pois ela se encontra no referencial de repouso.

Dilatação temporal

Saturno dista 1,43 x 10^{12} m do Sol, num referencial em repouso com respeito ao Sistema Solar. O foguete da astronauta Ana viaja em linha reta do Sol a Saturno com uma velocidade constante de 0,9c relativa ao sistema solar.

Quanto tempo levará para o foguete de Ana realizar o percurso em relação a Victor, que está na Terra (assumindo a Terra em repouso, por simplicidade)? E em relação a Ana?



R: Δt_V = 5300 s, e $\Delta t_A = \Delta\tau$ = 2310 s
Obs: Ambos são reais!!!

Aproximação útil quando v << c

Série de Taylor: para x ~ 0,

$$f(x) = (1+x)^s = 1 + x.\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} + (\ldots) \simeq 1 + sx$$

$$se\ v \ll c: \begin{cases} \sqrt{1-(\beta)^2} = (1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2} \approx 1 - \frac{1v^2}{2c^2} \\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2} \approx 1 + \frac{1v^2}{2c^2} \end{cases}$$

37.9 – Um ônibus escolar de 8,0 m de comprimento passa a 30 m/s. Qual é o valor de sua contração espacial?

Solução: 8,0 m no ref. do ônibus (comprimento/distância próprio) S' .

$$L = \sqrt{1-(\beta)^2}L' = \sqrt{1-(\beta)^2}l$$

$$L = \sqrt{1-(\beta)^2}l \approx \left(1 - \frac{1v^2}{2c^2}\right)l$$

Resposta: $l - L = 4 \times 10^{-14}$ *m*

Aproximação útil quando v << c

Recordando Série de Taylor:

$$f(x) = (1+x)^s = 1 + x.\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} + (\ldots) \simeq 1 + sx \quad se\ x << 1$$

$$se\ v \ll c: \begin{cases} \sqrt{1-(\beta)^2} = (1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2} \approx 1 - \frac{1v^2}{2c^2} & \sim \gamma^{-1} \\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2} \approx 1 + \frac{1v^2}{2c^2} & \sim \gamma \end{cases}$$

$$e\ \ x = (v/c)^2 \equiv \beta^2$$

Um avião viaja a 1080km/h = 300m/s entre o Rio e Manaus (4374km de distância). Qual é a diferença entre o tempo de viagem medido pelos passageiros, e o medido por alguém no solo?

Solução: $t_{solo} = 4374km/1080km/h = 4,05h$

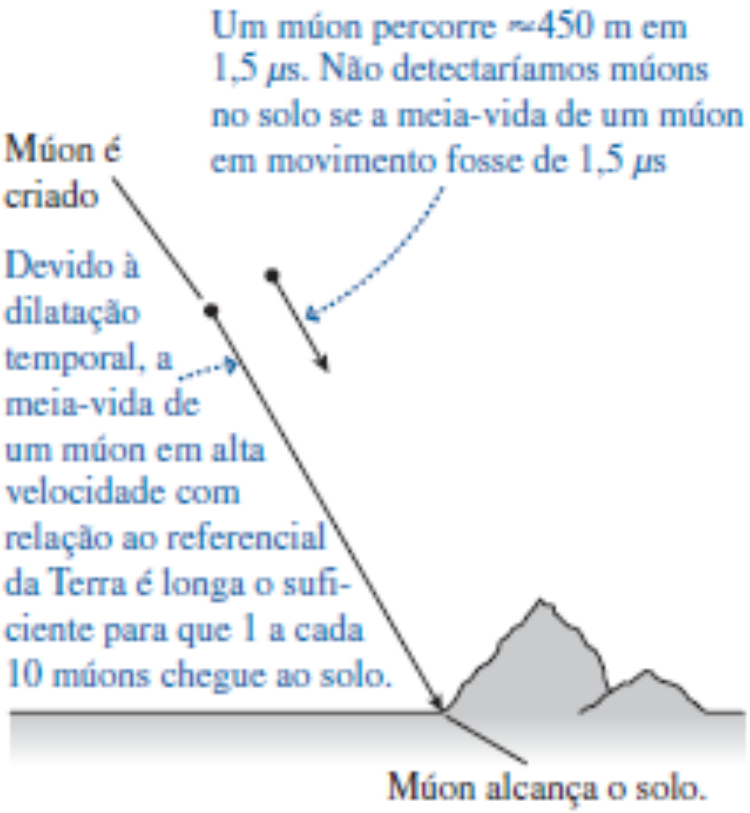
$\beta = 10^{-6} \Rightarrow t_{avião} = t_{solo}/\gamma \sim t_{solo}(1 - ½\ 10^{-12})$

Portanto: $t_{solo} - t_{avião} = 4,05h * 0.5 * 10^{-12} \sim 7x10^{-9}s$

Um experimento análogo foi de fato feito em 1971!

Evidência experimental direta

Múons são partículas subatômicas instáveis, que são criados constantemente na alta atmosfera (60km). Cerca de 10% deles são observados chegando ao solo, com velocidade v = 0,99969 c



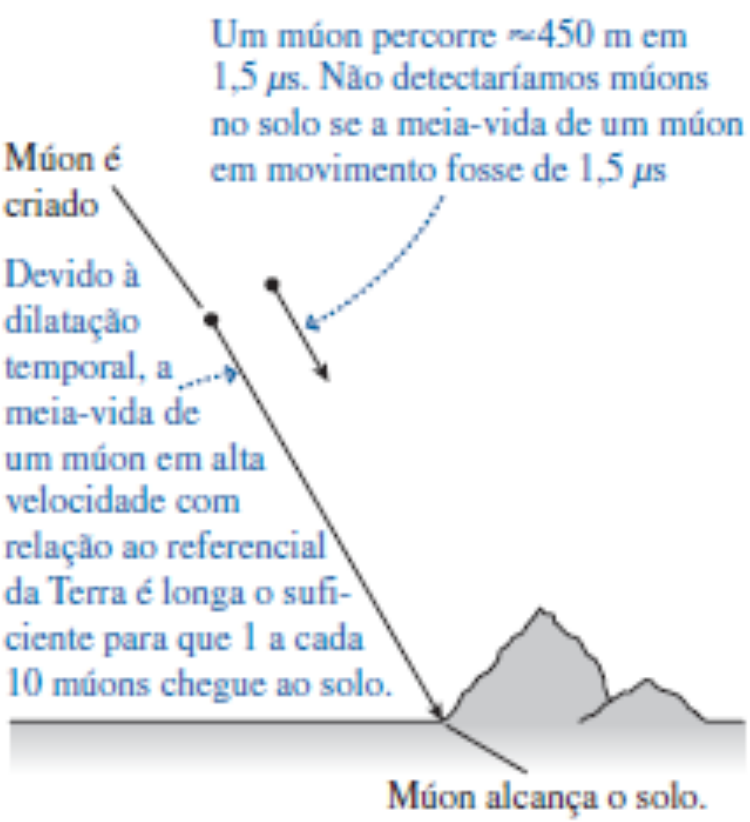
Problema: sabemos que o tempo de meia-vida de um múon é de apenas 1,5μs, correspondendo a percorrer apenas 450m. Após isso ele já tem 50% de chance de ter se desintegrado!!

A fração dos múons capazes de percorrer 60km = 133 x 450m seria apenas

$$(0,5)^{133} \sim 10^{-40} \text{ !!!!!}$$

Evidência experimental direta

Múons são partículas subatômicas instáveis, que são criados constantemente na alta atmosfera (60km). Cerca de 10% deles são observados chegando ao solo, com velocidade v = 0,99969 c



Solução: no referencial do solo, o tempo para a queda dos múons é

$$\Delta t = L / c = 200\mu s$$

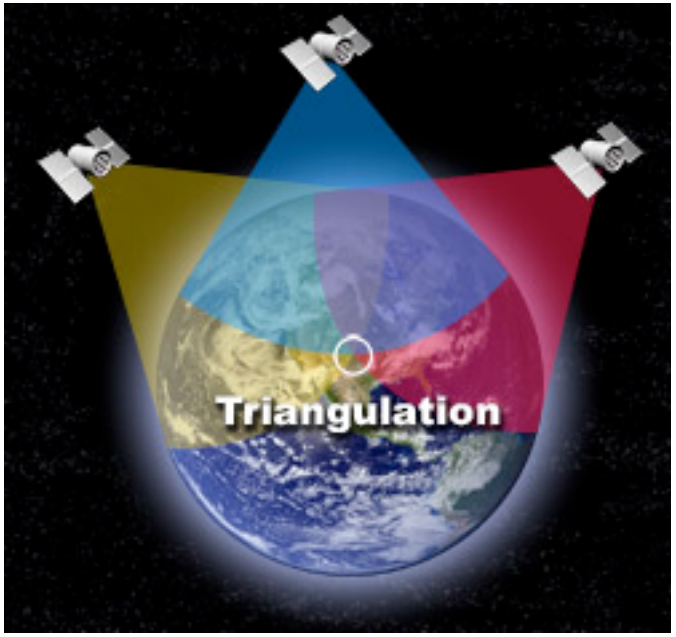
Devido à dilatação temporal, isto corresponde a **apenas τ = 5μs no referencial dos múons** (pois $\gamma \sim 40$). Assim, a fração dos múons que chega deve de fato ser

$$(0,5)^{(5\,/\,1,5)} \sim 0.1 \quad !!!!!$$

Visto de outra forma, **no referencial dos múons** a distância até o chão é contraída para apenas

$$L' = L / \gamma = 1,5 \text{ km}$$

Dilatação temporal e GPS

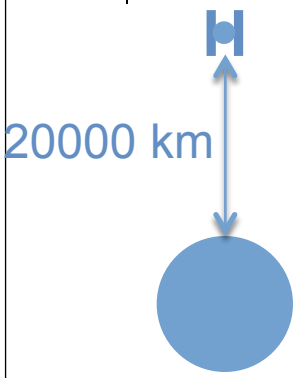


O Sistema GPS recebe sinais de satélites orbitando a cerca de 20.000km de altitude. Simplificando um pouco: o sinal tem uma assinatura temporal, a qual permite saber quanto tempo passou desde que foi enviado, portanto a distância do satélite naquele momento.

Como a órbita dos satélites é conhecida, se pelo menos 3 forem detectados pode-se então obter a posição do receptor por triangulação.

Problema: sem levar em conta os efeitos de dilatação temporal previstos pela relatividade, esses tempos e posições estarão *errados!*

Dilatação temporal e GPS



Desafio: calcular qual o erro na estimativa de distância com respeito a um satélite GPS que se acumula durante apenas 1h (medido no relógio do satélite) devido ao efeito de dilatação temporal da relatividade especial.

Passo 1: calcule a velocidade orbital do satélite (usando a Lei da Gravitação Universal de Newton). **R: v = 4km/s**

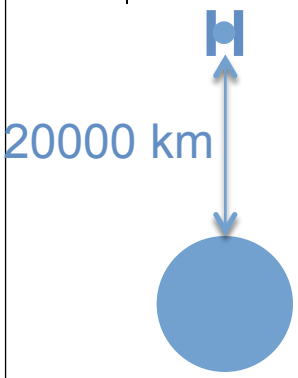
Passo 2: obtenha o fator γ do satélite, e use-o para calcular o tempo medido no referencial do solo que corresponde a 1h no relógio do satélite

R: $t = 1h + 3x10^{-7}s$

Passo 3: qual a distância que a luz percorre nesse intervalo adicional? Esse é o erro se você esquecer da relatividade ao estimar sua posição!

R: cerca de 90m!

Dilatação temporal e GPS



Desafio: calcular qual o erro na estimativa de distância com respeito a um satélite GPS que se acumula durante apenas 1h (medido no relógio do satélite) devido ao efeito de dilatação temporal da relatividade especial.

Obs: na verdade o cálculo real é mais complicado, pois o referencial do satélite *não é inercial*, já que ele percorre uma curva! Nesse caso, também é preciso levar em conta outros efeitos previstos pela *Teoria da Relatividade Geral* .

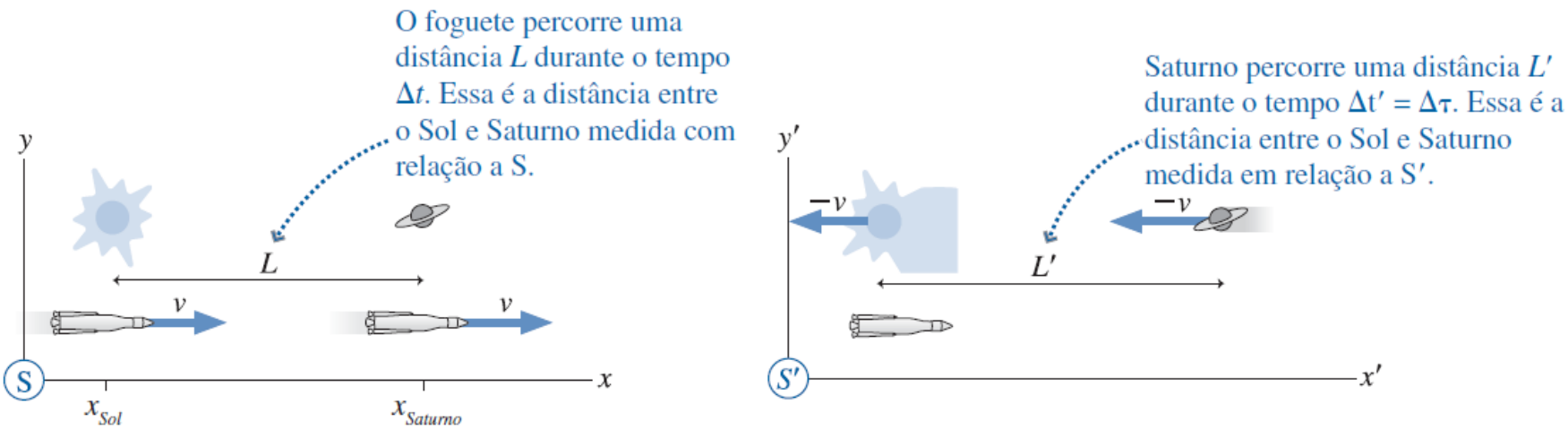
Sem isso o sistema GPS não funcionaria!!

Contração Espacial

De volta ao foguete de Ana:

(a) Referencial S: o Sistema Solar está estacionário.

(b) Referencial S′: e foguete está parado.



O foguete de Ana viaja em linha reta do Sol até Saturno com velocidade 0.9c relativamente ao referencial S do sistema solar. A distância Saturno-Sol é de $1{,}43 \times 10^{12}$m nesse referencial.

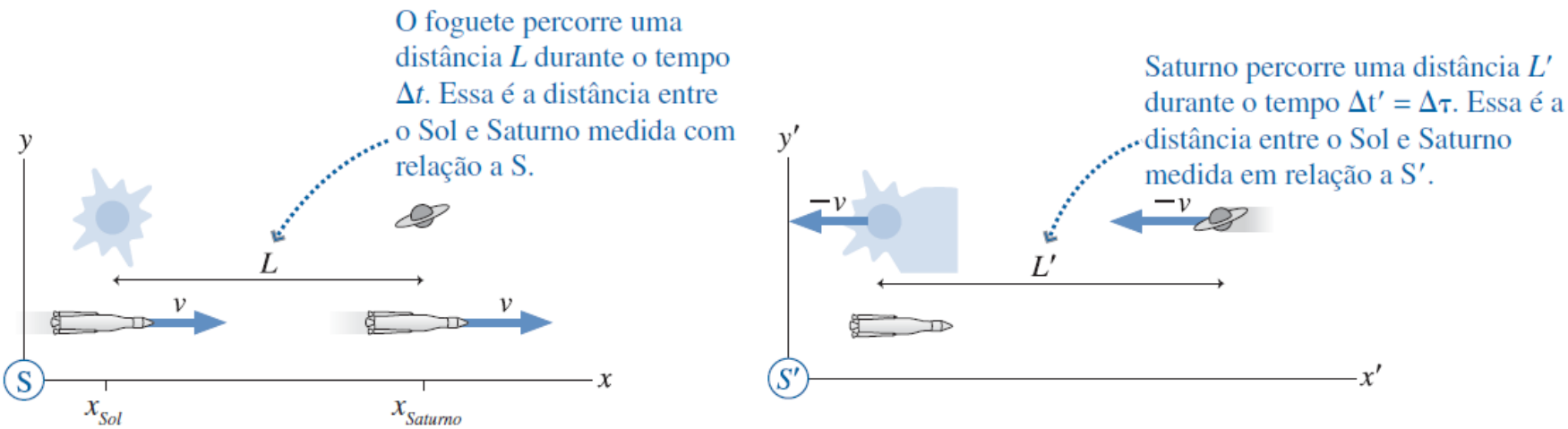
P: Qual é a distância entre o Sol e Saturno medida em relação ao referencial S' de Ana?

Contração Espacial

De volta ao foguete de Ana:

(a) Referencial S: o Sistema Solar está estacionário.

(b) Referencial S′: e foguete está parado.



$$L' = \sqrt{1-(\beta)^2}L = L/\gamma \leq L$$

R: se β =0.9 e L = 1,43x 10^{12} m: L' = 0,62 x 10^{12} m.

Contração Espacial

Conclusão: a distância espacial *L* entre dois objetos, conforme medido em um referencial *S* em que a "régua" utilizada se move, é *menor* do que a distância *L'* registrada no referencial *S'* onde a régua está em repouso. Chamamos esse efeito de

CONTRAÇÃO ESPACIAL

A *distância* entre dois eventos também depende do referencial !

Distância própria

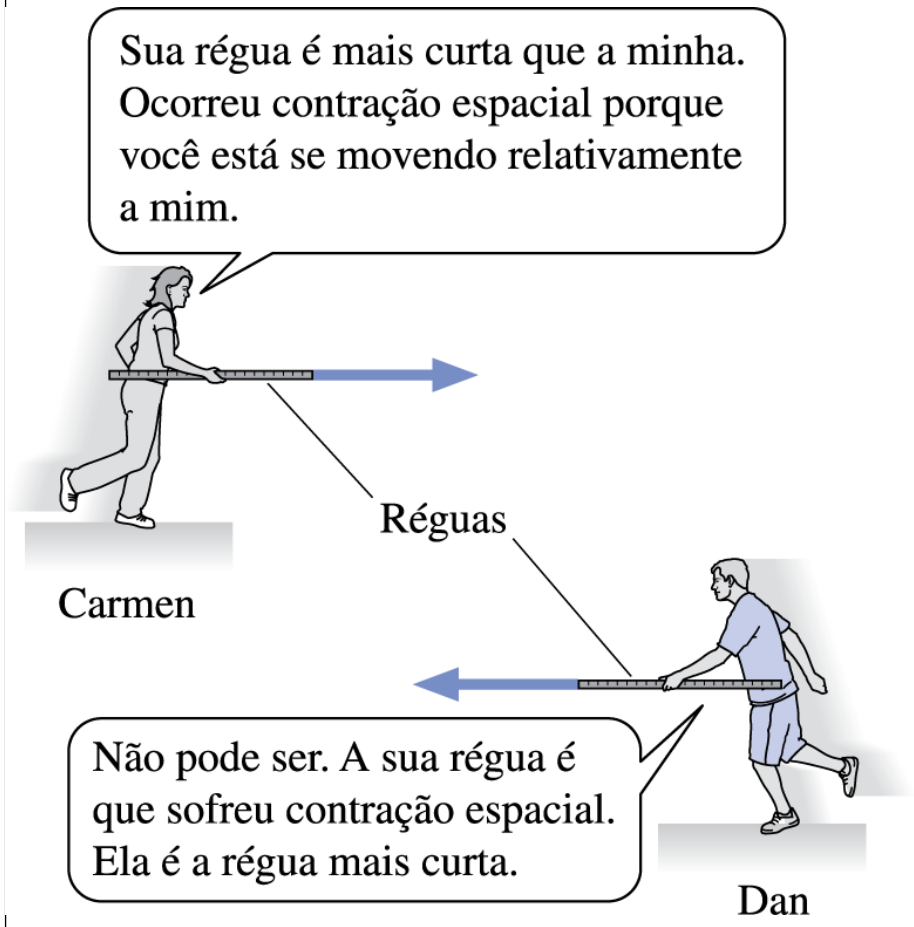
Def: **distância própria** l = distância medida por um régua entre dois eventos que ocorrem **simultaneamente, ie, no mesmo instante do tempo, no referencial inercial de repouso da régua**.

Em qualquer outro referencial inercial (em movimento com respeito à régua), a distância entre esses eventos será **menor que a distância própria**, por um fator $\gamma > 1$.

Caso particular: a distância própria **entre dois *objetos*** em repouso um em relação ao outro (ou **entre duas partes de um mesmo objeto**!) é aquela medida por uma régua também em repouso em relação a eles. No exemplo acima: a distância própria entre o Sol e Saturno é l **= L** (distância medida no referencial de Victor)**.**

"Objetos em movimento ficam menores"

Paradoxo?



P: Quem está certo?

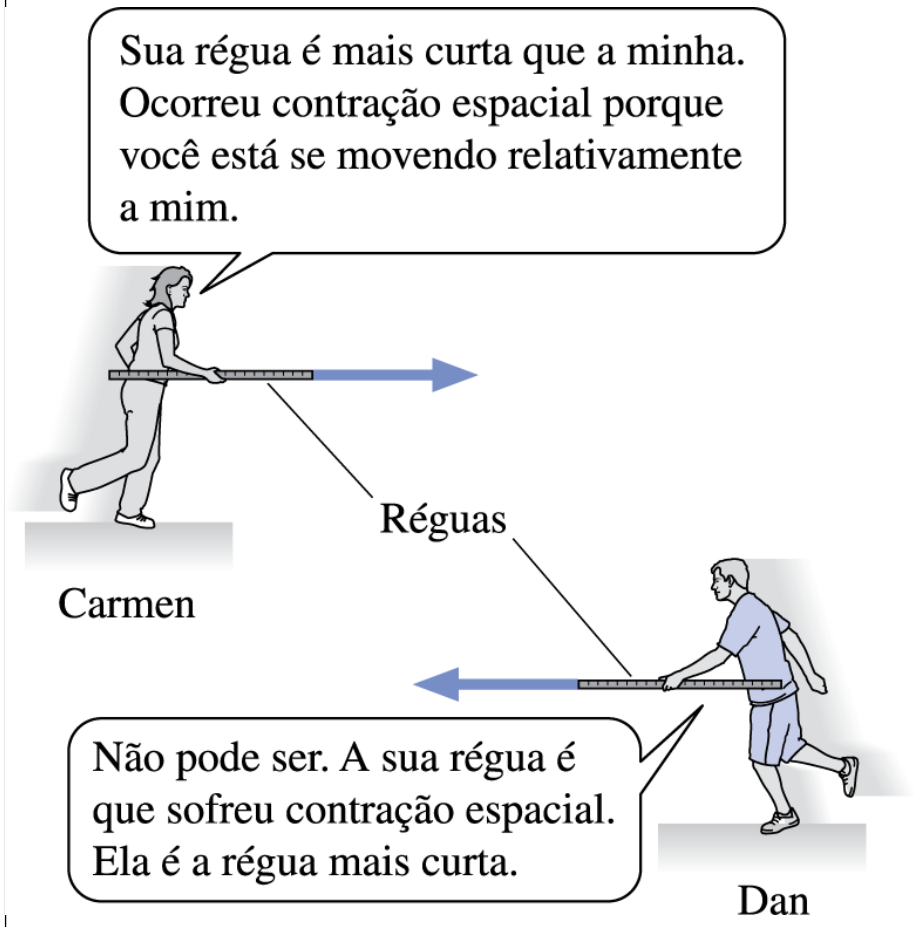
A) Carmen

B) Dan

C) Ambos

D) Nenhum dos dois: as duas réguas tem comprimentos iguais nos dois referenciais.

Paradoxo?



P: Quem está certo?

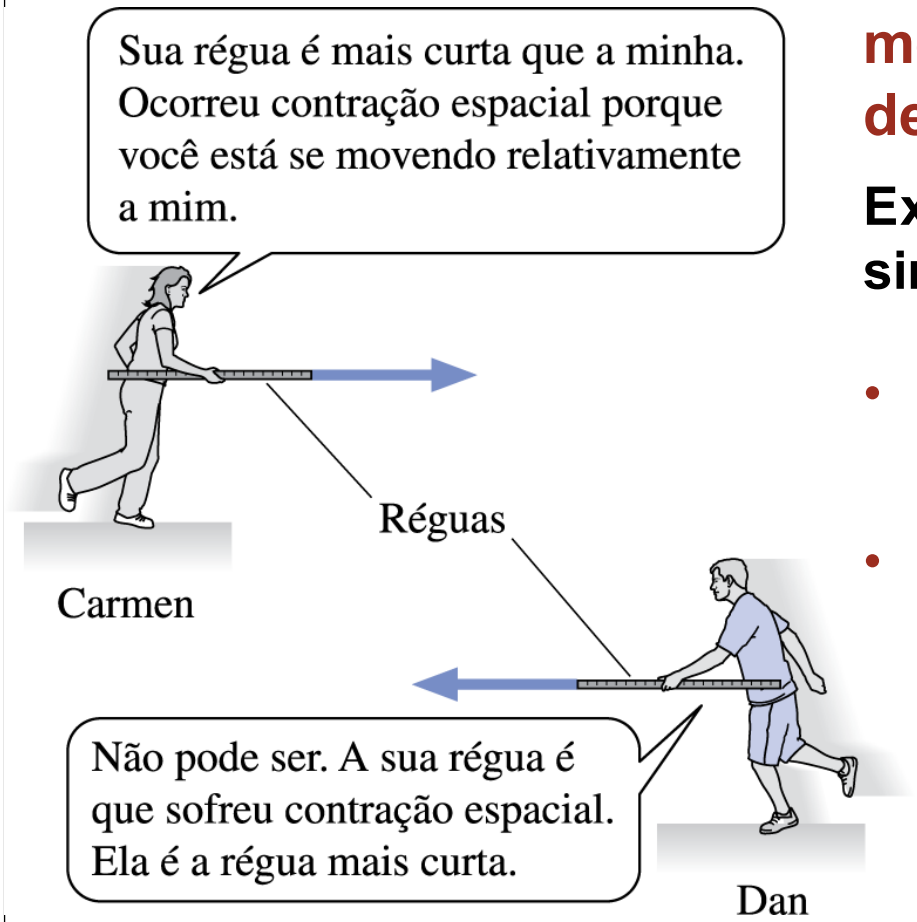
A) Carmen

B) Dan

C) Ambos

D) Nenhum dos dois: as duas réguas tem comprimentos iguais nos dois referenciais.

Paradoxo?



Para medir o comprimento de um corpo em movimento, é preciso medir *simultaneamente* a posição de cada extremidade

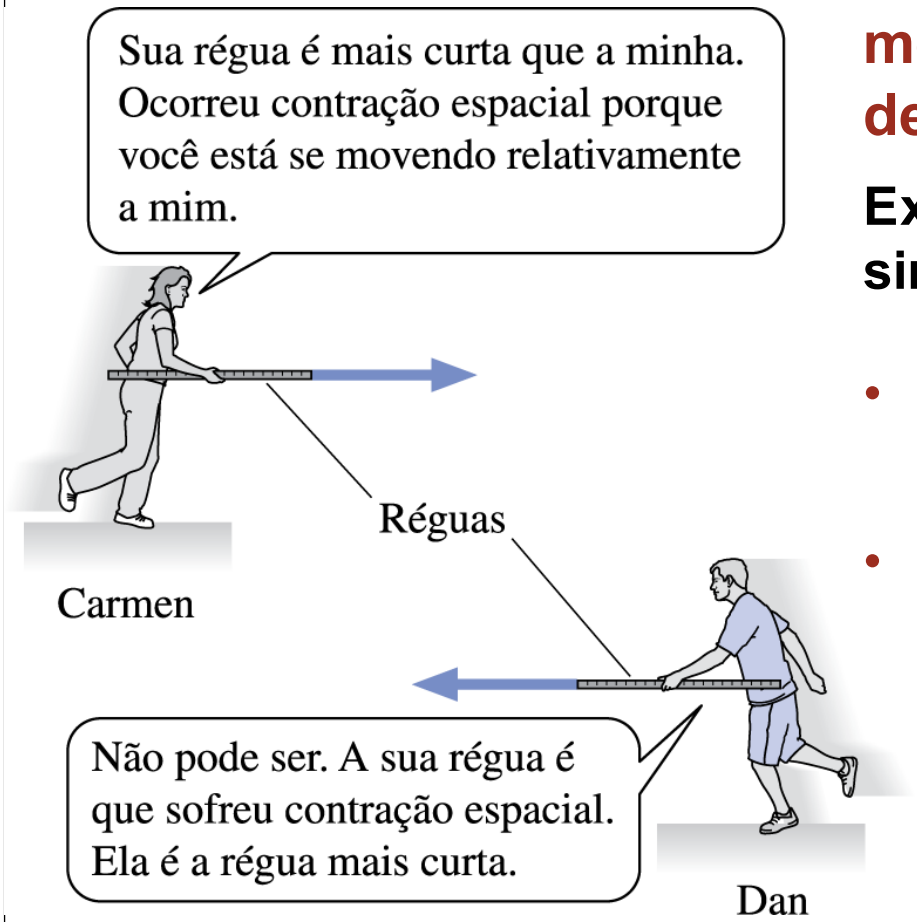
Ex: No Ref. S de Carmen, são simultâneos:

- **Ev1: Carmen mede a posição da ponta esquerda da sua régua**
- **Ev2: Carmen mede a posição da ponta direita da sua régua**

P: E no Ref. S' de Dan, qual é a ordem desses eventos?

A) $t_1' < t_2'$ B) $t_1' > t_2'$ C) $t_1' = t_2'$ D) Depende de *v*

Paradoxo?



Para medir o comprimento de um corpo em movimento, é preciso medir *simultaneamente* a posição de cada extremidade

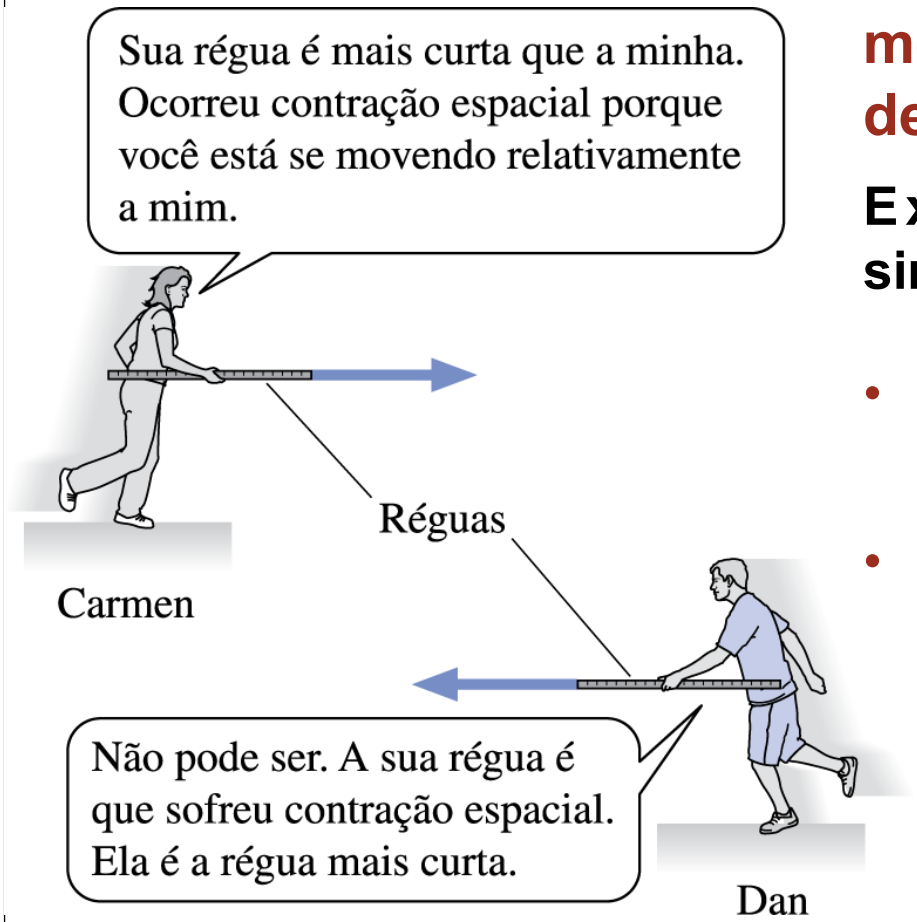
Ex: No Ref. S de Carmen, são simultâneos:

- **Ev1: Carmen mede a posição da ponta esquerda da sua régua**
- **Ev2: Carmen mede a posição da ponta direita da sua régua**

P: E no Ref. S' de Dan, qual é a ordem desses eventos?

A) $t_1' < t_2'$ B) $t_1' > t_2'$ C) $t_1' = t_2'$ D) Depende de *v*

Paradoxo?



Para medir o comprimento de um corpo em movimento, é preciso medir *simultaneamente* a posição de cada extremidade

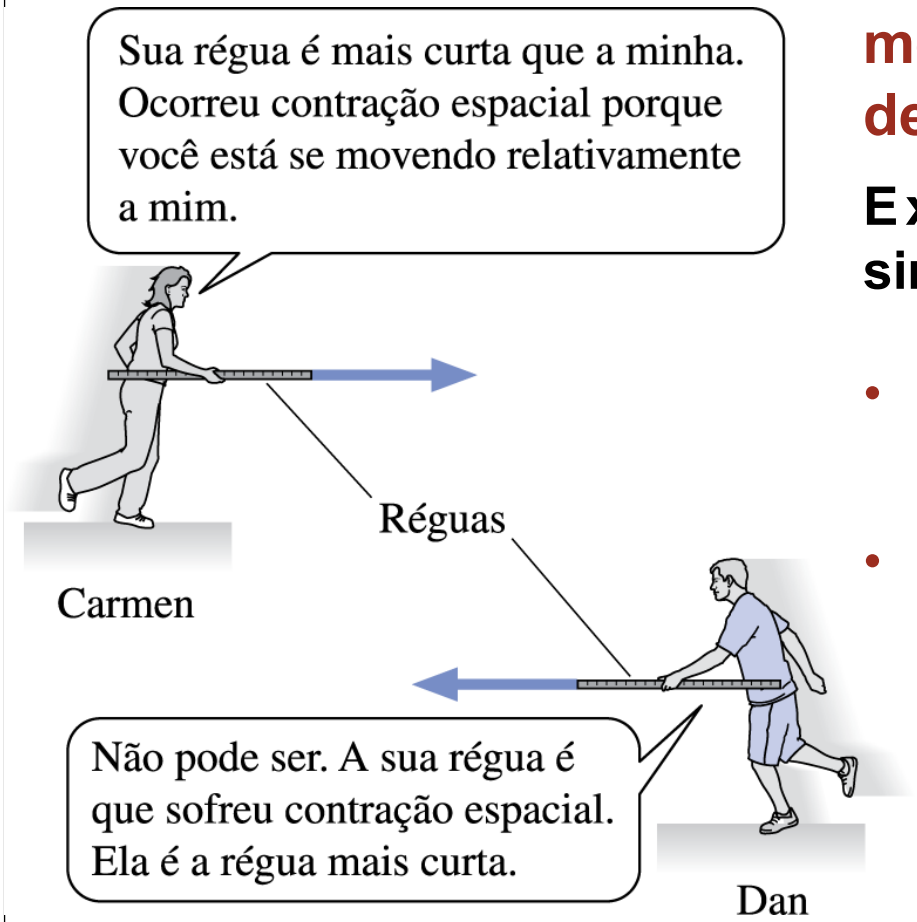
Ex: No Ref. S' de Dan, são simultâneos:

- **Ev3: Dan mede a posição da ponta esquerda da régua de Carmen**
- **Ev4: Dan mede a posição da ponta direita da régua de Carmen**

P: E no Ref. S de Carmen, qual é a ordem desses eventos?

A) $t_3 < t_4$ B) $t_3 > t_4$ C) $t_3 = t_4$ D) Depende de *v*

Paradoxo?



Para medir o comprimento de um corpo em movimento, é preciso medir *simultaneamente* a posição de cada extremidade

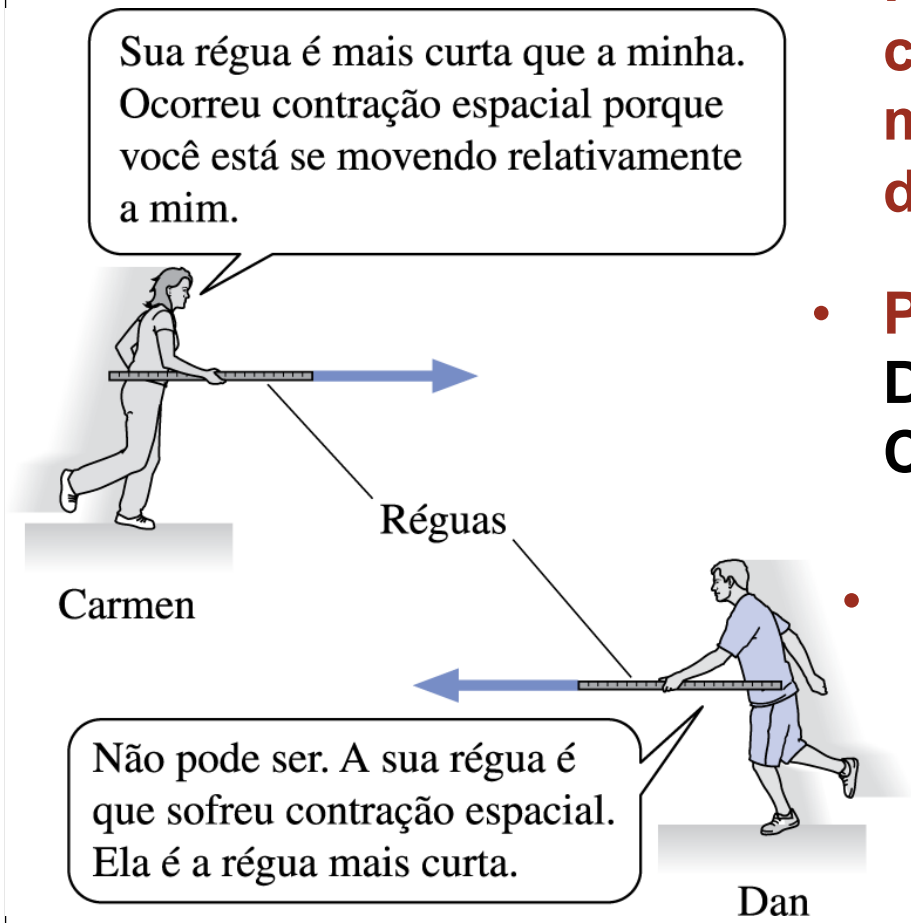
Ex: No Ref. S' de Dan, são simultâneos:

- **Ev3: Dan mede a posição da ponta esquerda da régua de Carmen**
- **Ev4: Dan mede a posição da ponta direita da régua de Carmen**

P: E no Ref. S de Carmen, qual é a ordem desses eventos?

A) $t_3 < t_4$ B) $t_3 > t_4$ C) $t_3 = t_4$ D) Depende de *v*

Paradoxo?



- **Para medir o comprimento de um corpo em movimento, é preciso medir *simultaneamente* a posição de cada extremidade**

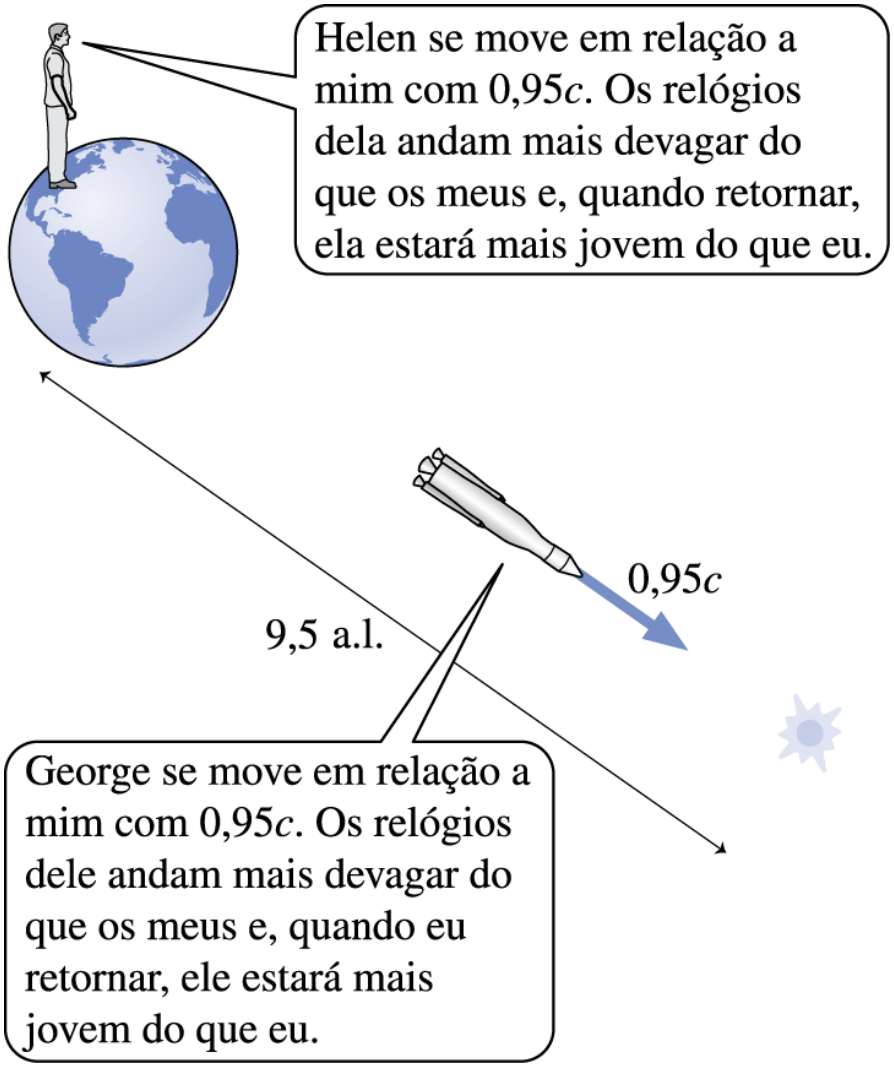
- **Porém, eventos simultâneos para Dan *não são simultâneos* para Carmen, e vice-versa!**

- **Para Carmen, Dan mede *primeiro* a posição da ponta da frente da régua dela, e *depois* a de trás. Ben diz que Carmen faz o mesmo com a régua dele…**

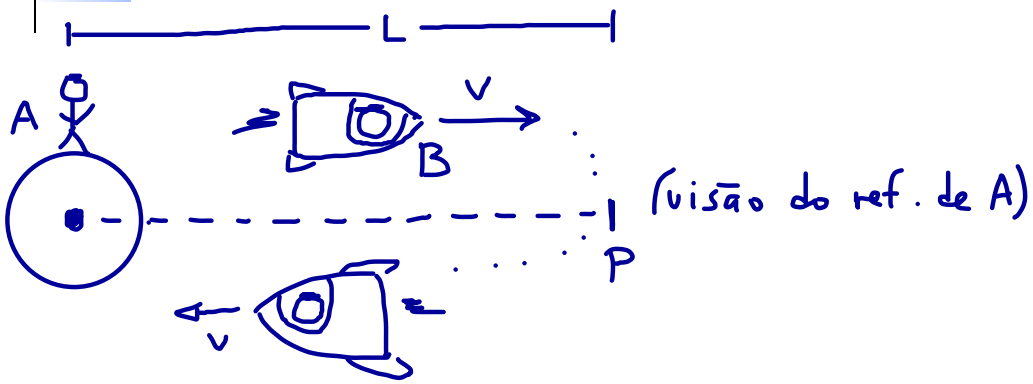
“Paradoxo” dos Gêmeos

George e Helen são gêmeos: Helen parte em uma viagem até uma estrela distante. Quando ela volta à Terra, quem estará mais jovem, George ou Helen? Ou terão a mesma idade?

A) George
B) Helen
C) Mesma idade



"Paradoxo" dos Gêmeos - a solução
(obs: não está no livro!)



Ref. de A:

distância entre A e P: L

tempo até reencontro: $\boxed{t_A = \frac{2L}{v}}$

Ref. da ida de B

distância entre A e P: $L' = \underbrace{\sqrt{1 - v^2/c^2}}_{= \gamma^{-1} < 1} L < L$!

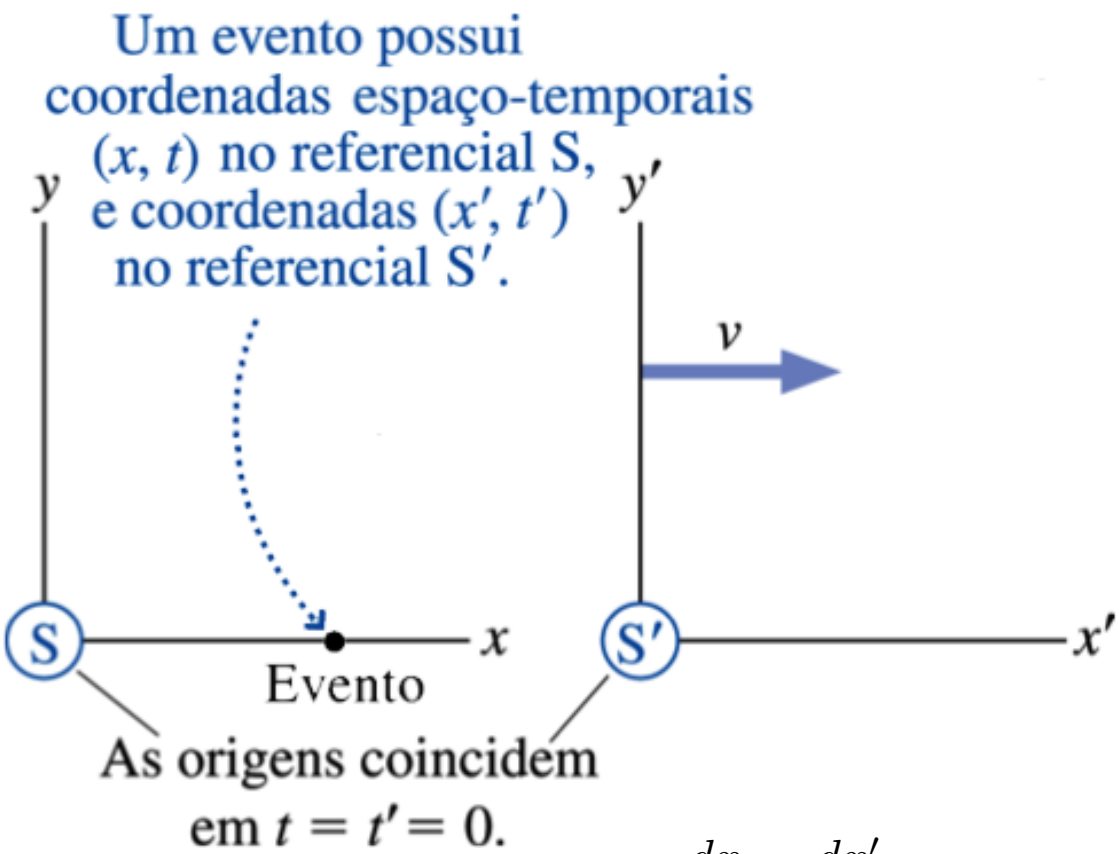
tempo de ida: $\boxed{t_{B_1} = \frac{\gamma^{-1} L}{v}}$

Ref. da volta de B: novamente $L' = \gamma^{-1} L \rightarrow t_{B_2} = \frac{\gamma^{-1} L}{v}$

$$\rightarrow \boxed{t_B = \frac{2L}{\gamma v} < t_A !}$$

$\rightarrow$ B está mais novo que A!

Transformações de Galileu



$$x = x' + vt$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

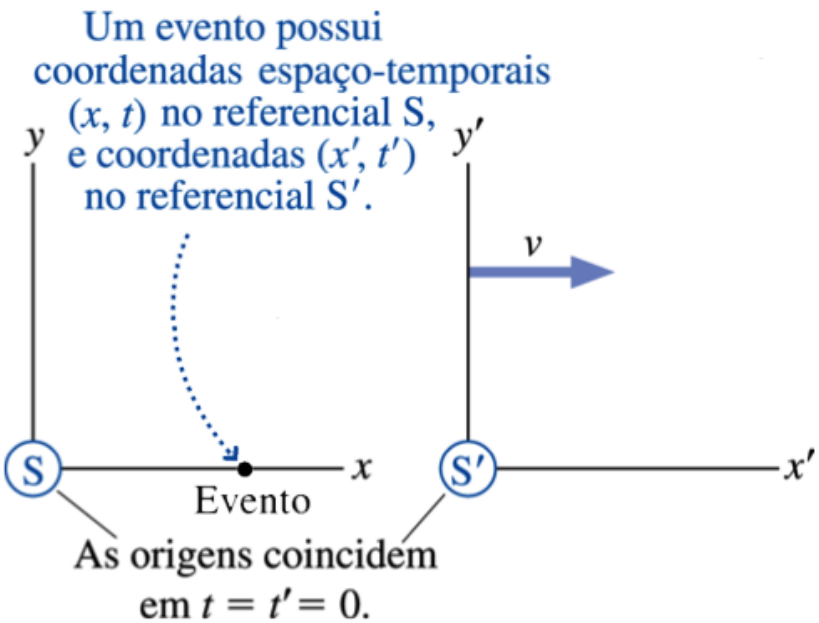
$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v = u'_x + v$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = u'_y$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} = u'_z$$

Transformações de Lorentz

As transformações corretas têm de satisfazer quatro condições:



1) Concordar com as transformações de Galileu no limite de baixas velocidades; v << c

2) Transformar não apenas as coordenadas espaciais, mas também a coordenada temporal.

3) Assegurar que a velocidade da luz seja sempre a mesma, *c* , em todos os referenciais.

4) Serem *lineares*:

$$x' = a\,x + b\,t \quad \text{e} \quad t' = A\,x + B\,t\,,$$

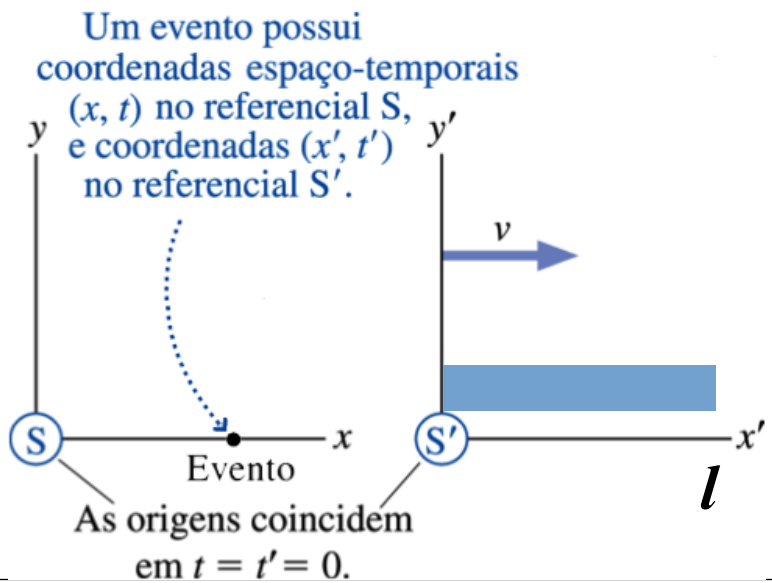
onde ***a, b, A*** *e* ***B*** *são constantes que dependem apenas de* ***v***

Transformações de Lorentz: dedução

- **Evento 1:** um relógio localizado na origem de *S'* ($x'_1 = 0$) marca t'_1
  - No ref. *S*, este evento tem coordenadas ($x_1 = vt_1$, t_1) para algum t_1. Substituindo na transformação:

$$0 = x_1' = av\,t_1 + bt_1 \longrightarrow b = -av \longrightarrow \mathbf{x' = a\,(x - v\,t)}$$

Considere agora uma régua de comprimento próprio l, que está parada no referencial S', indo de x' =0 até x'= l



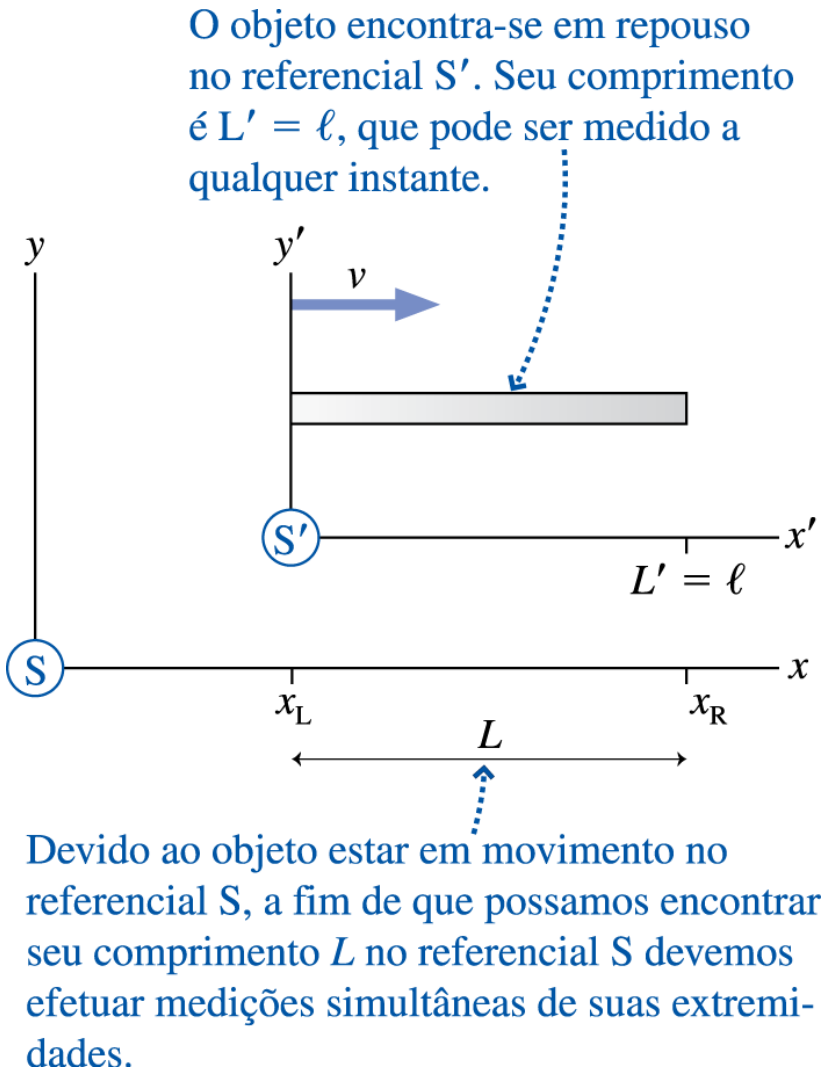
Transformações de Lorentz: dedução

- **Evento 2:** A ponta da régua passa por um relógio parado no referencial *S*, no mesmo instante t_1 do Evento 1. Chamando de x_2 a posição deste evento no referencial *S* e substituindo na transformação:

$$l = x'_2 = a\,(x_2 - v\,t_1) = a\,(x_2 - x_1)$$

- Mas sabemos que, pela contração espacial, as distâncias entre os dois eventos nos dois referenciais satisfazem:

$$x_2' - x_1' = \gamma\,(x_2 - x_1)$$



Conclusão: a = γ → $\boxed{x' = \gamma\,(x - v\,t)}$

Transformações de Lorentz: dedução

$$x' = \gamma (x - v\, t)$$

- Usando os mesmos argumentos mas com uma régua parada no referencial *S*, podemos concluir também que

$$x = \gamma (x' + v\, t')$$

- Resolvendo para *t'* em função de x, t :

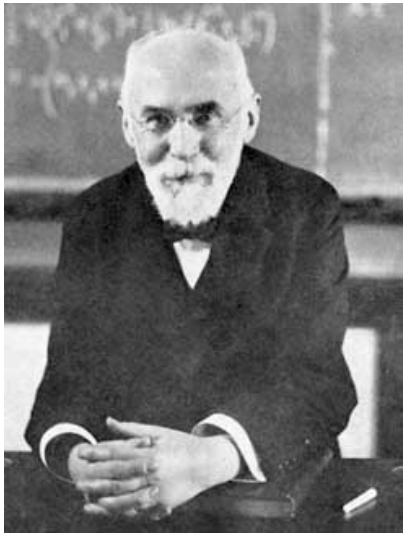
$$t' = \gamma (t - v\, x / c^2)$$

Transformações de Lorentz: dedução

As transformações corretas têm de satisfazer quatro condições:

$$x' = \gamma (x - v\, t)$$

$$t' = \gamma (t - v\, x / c^2)$$



Hendrik Lorentz

1) Concordar com as transformações de Galileu no limite de baixas velocidades; v << c ✔

2) Transformar não apenas as coordenadas espaciais, mas também a coordenada temporal. ✔

3) Assegurar que a velocidade da luz seja sempre a mesma, *c* , em todos os referenciais. ✔

4) Serem *lineares*: ✔

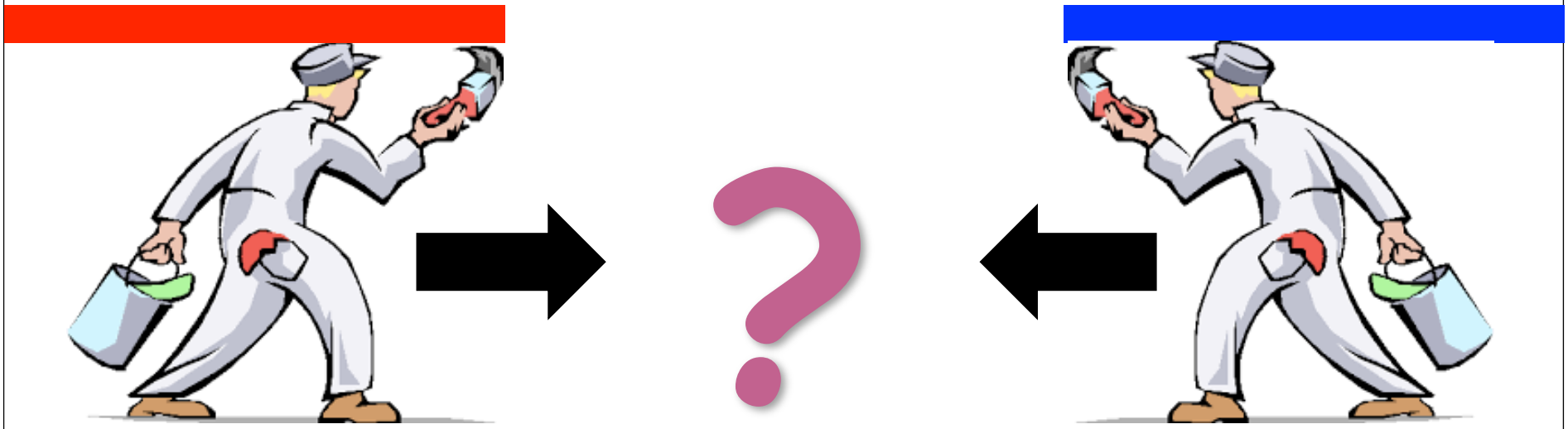
$$x' = a\, x + b\, t \quad \text{e} \quad t' = A\, x + B\, t\,,$$

onde ***a, b, A*** *e* ***B*** *são constantes que dependem apenas de* ***v***

Transformações de Lorentz

O que ocorre com as distâncias y e z, perpendiculares ao movimento? Contraem? Esticam?

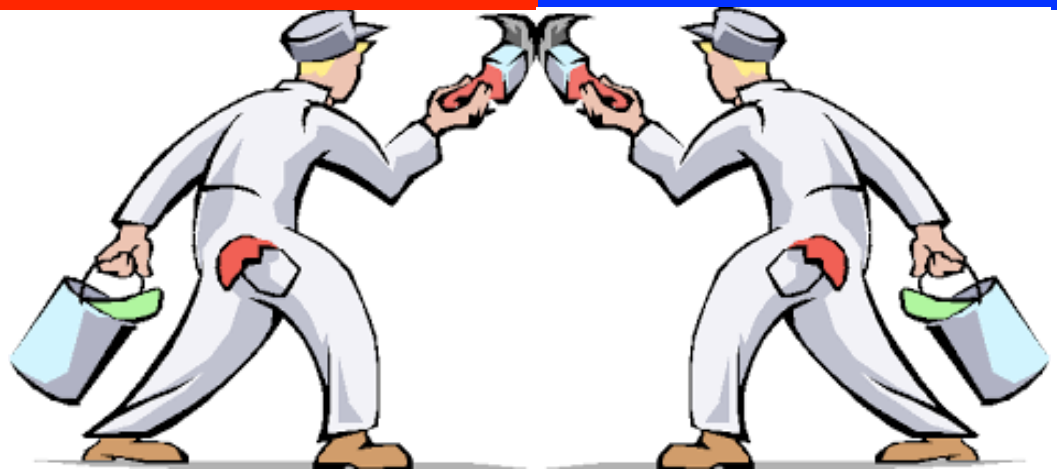
A) Contraem menos que as na direção x
B) Contraem da mesma forma que as na direção x
C) Esticam
D) Nada



Transformações de Lorentz

O que ocorre com as distâncias y e z, perpendiculares ao movimento? Contraem? Esticam?

A) Contraem menos que as na direção x
B) Contraem da mesma forma que as na direção x
C) Esticam
D) Nada



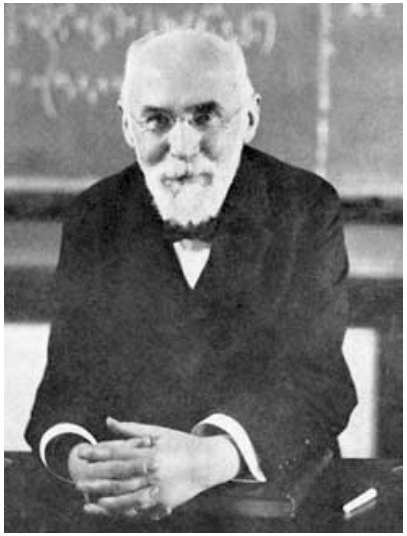
Transformações de Lorentz

O que ocorre com as distâncias y e z, perpendiculares ao movimento? Contraem? Esticam?

A) Contraem menos que as na direção x
B) Contraem da mesma forma que as na direção x
C) Esticam
D) Nada

De S para S'	de S' para S
$x' = \gamma (x - vt)$	$x = \gamma (x' + v t')$
$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$z = z'$
$t' = \gamma (t - vx / c^2)$	$t = \gamma (t' + vx' / c^2)$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

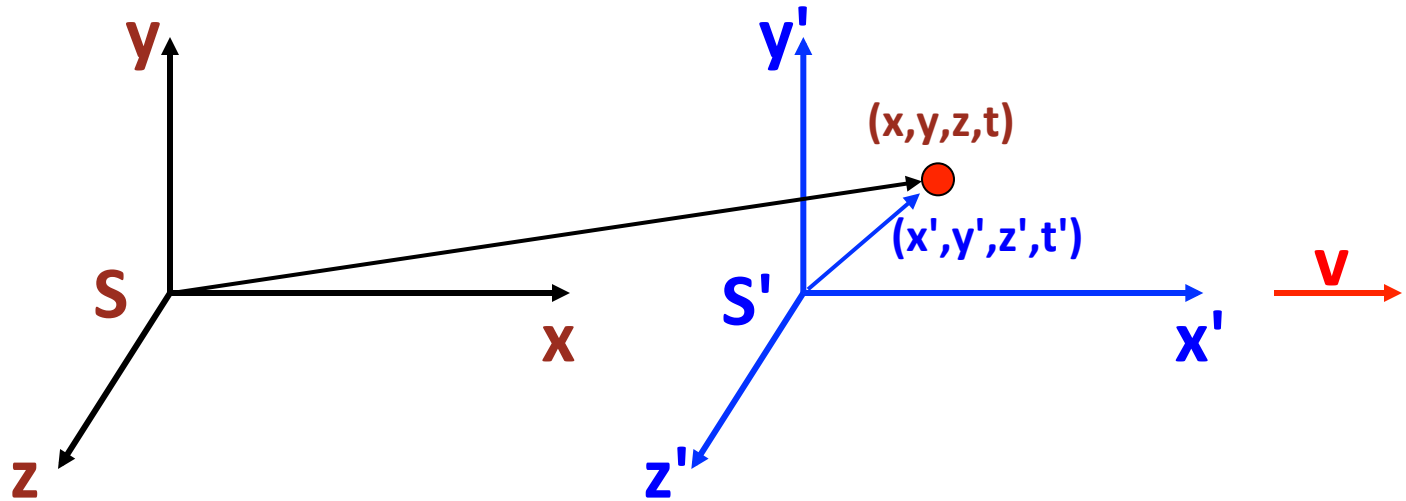


Hendrik Lorentz

Transformações de Lorentz

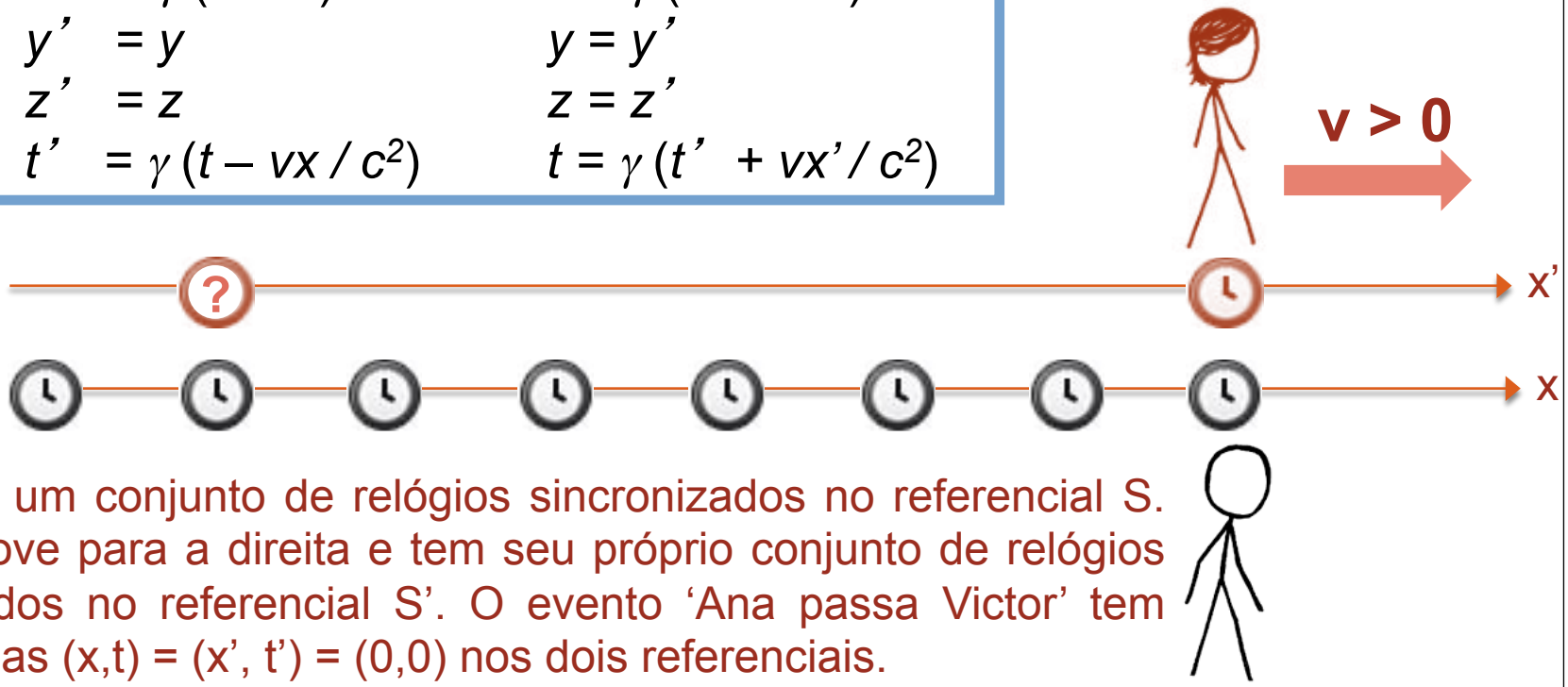
De S para S'	de S' para S
$x' = \gamma (x - vt)$	$x = \gamma (x' + v t')$
$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$z = z'$
$t' = \gamma (t - vx / c^2)$	$t = \gamma (t' + vx' / c^2)$

Atenção: aqui estamos assumindo a convenção de que o ponto (0,0) é o mesmo em ambos os referenciais (i.e., que os relógios de S e S' são iniciados no instante em que as origens dos dois referenciais coincidem.



Transformações de Lorentz

De S para S'	de S' para S
$x' = \gamma (x - vt)$	$x = \gamma (x' + v t')$
$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$z = z'$
$t' = \gamma (t - vx / c^2)$	$t = \gamma (t' + vx' / c^2)$



Victor tem um conjunto de relógios sincronizados no referencial S. Ana se move para a direita e tem seu próprio conjunto de relógios sincronizados no referencial S'. O evento 'Ana passa Victor' tem coordenadas (x,t) = (x', t') = (0,0) nos dois referenciais.
Um observador no referencial S checa o relógio de Ana marcado '?'. Comparado com os relógios de Victor, aquele indica um instante

A) Ligeiramente anterior **B) Ligeiramente posterior**

C) Igual **D) A resposta pode ser (A), (B) ou (C), dependendo do valor de v**

Transformações de Lorentz: 2 eventos

de S para S'	de S' para S
$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$	$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\,\Delta t')$
$\Delta y' = \Delta y$	$\Delta y = \Delta y'$
$\Delta z' = \Delta z$	$\Delta z = \Delta z'$
$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x / c^2)$	$\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x' / c^2)$

Casos particulares:

Relatividade da Simultaneidade. Se $\Delta t' = 0$: $\Delta t = \gamma\, v/ c^2\, \Delta x'$

[Se no Ref. S' 2 eventos ocorrem simultaneamente mas em pontos diferentes do espaço, não serão simultâneos no Ref. S]

Dilatação temporal. Se $\Delta x' = 0$: $\Delta t = \gamma\, \Delta t'$

[Para 2 eventos no mesmo ponto do Ref. S', um relógio em S medirá um intervalo de tempo maior que um relógio em S']

Contração espacial. Se $\Delta t = 0$: $\Delta x = \Delta x' / \gamma$

[Medindo simultaneamente no Ref. S a posição de dois objetos/eventos, encontramos uma distância menor que a medida no Ref. S']